ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\alpha + \beta i$, $\gamma+\delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\gamma+\delta i \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\,i$$

Μονάδες 9

Β. *Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης Ι** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης ΙΙ** (δύο αριθμοί στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν).*

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
Α. i^1	**1.** $-i$
Β. i^2	**2.** $+1$
Γ. i^3	**3.** i
Δ. i^4	**4.** -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ**, ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Μονάδες 4

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ, Δ, Ε** και **ΣΤ,** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Γ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 3

Δ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Μονάδες 3

ΣΤ. Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ, της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x)=\begin{cases} 4x^2+3, & x<1 \\ 6x+k, & x\geq 1 \end{cases}$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, ώστε να ισχύει:

$$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i\ .$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν $\mathrm{Im}(z) = 0$, τότε $α = 1$.

Μονάδες 5

β. αν $α = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

Μονάδες 5

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \le α \le 1$.

Μονάδες 7

δ. οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8